

1 Blasencluster und Polyeder

John M. Sullivan

Technische Universität Berlin

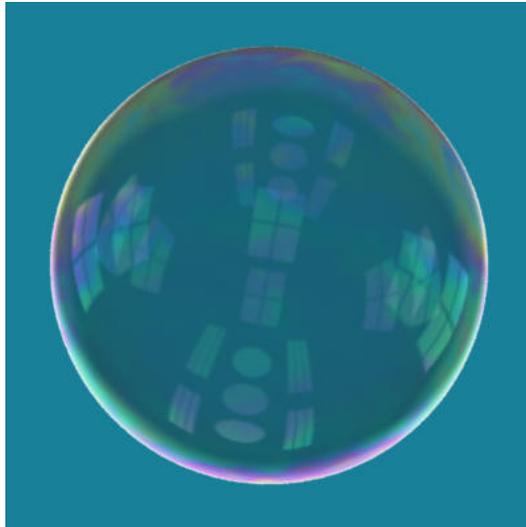


Abbildung 1.1. Eine Seifenblase ist deswegen eine Sphäre (eine runde Kugel), weil diese Form den geringsten Flächeninhalt hat.

Jede einzelne Seifenblase ist kugelförmig (Abb. 1.1). Diese Tatsache, die Kinder bereits seit Jahrhunderten beobachten, lässt sich dadurch erklären, dass die Oberflächenspannung die Seifenhaut festzieht. Die Seifenblase, die eine bestimmte Menge Luft einschließt, minimiert ihren Flächeninhalt. Schon die alten Griechen um Archimedes wussten, dass die Sphäre – die Oberfläche einer runden Kugel – die Lösung des sogenannten isoperimetrischen Problems ist. Das heißt, sie ist die Fläche des geringsten Inhalts, die ein gegebenes Volumen einschließt. (Ein rigoroser Beweis dazu wurde allerdings erst 1884 von H. A. Schwarz geliefert.) Der Beitrag von Dirk Ferus in diesem Buch erklärt ausführlich die einzelne Seifenblase und zeigt z.B. andere schöne, fantasievolle Gebilde, die nur mathematisch und nicht physikalisch existieren können.

Wenn man Seifenblasen macht, sieht man aber oft einen Blasencluster: mehrere Blasen sind zu einer komplizierten Struktur zusammengefügt. Mathematisch gesehen löst dieser Blasencluster ein ähnliches Minimierungsproblem: mehrere gegebene

ne Volumina einzuschließen und abzutrennen, mit insgesamt so wenig Flächeninhalt wie möglich.

Blasencluster werfen mathematische Probleme auf, von denen viele noch ungelöst sind. Wir vermuten, dass die optimalen Cluster von bis zu vier Blasen genau diejenigen sind, die wir bei Seifenblasen sehen (Abb. 1.2, links). Diese sind aus

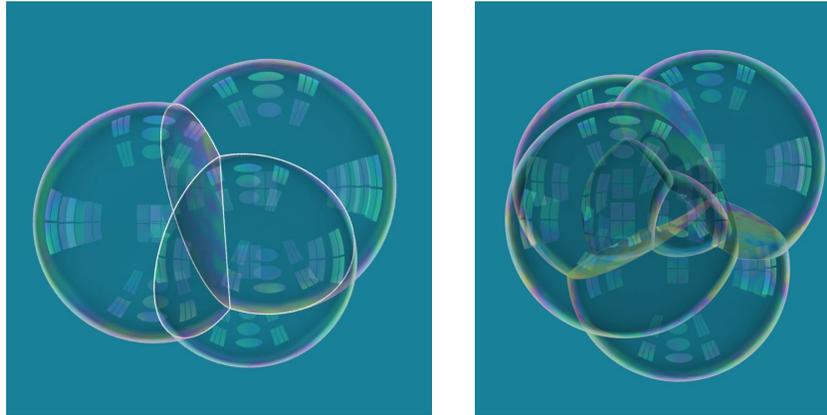


Abbildung 1.2. Der (vermutlich) optimale Cluster von drei Blasen (links) ist aus sphärischen Flächen gebaut. In diesem Cluster von sechs Blasen (rechts) sind die Flächen nicht sphärisch. Mittig zwischen den beiden kleinen Blasen sehen wir (von der Seite) eine sattelförmige Minimalfläche.

sphärischen Teilflächen gebaut, die auf bestimmte Weise aneinander grenzen. Es gibt jedoch einen Cluster von sechs Blasen (Abb. 1.2, rechts), wo die Flächenstücke nicht sphärisch sind.

Innerhalb der letzten Jahrzehnte wurden einige neue Erkenntnisse gewonnen. Jetzt wissen wir, dass die optimale Doppelblase wirklich die ist, die wir normalerweise sehen: drei Teilflächen verschiedener Sphären, die entlang einem Kreis aneinander angrenzen (Abb. 1.3, links). Andere bizarre Möglichkeiten, die noch nie in der Natur gesehen wurden, obwohl sie alle mathematischen Regeln erfüllen (wie die fantasievollen Einzelblasen von Herrn Ferus), müssen mehr Flächeninhalt haben. Bei Abb. 1.3, rechts, ist zu erkennen, dass die obere und untere Kugel Teile derselben Blase sind; die zweite Blase bildet einen Ring oder Gürtel um diese erste.

Wenn wir zur dreifachen Blase kommen, ist das Problem schon viel schwieriger. Bislang ist es nur in zwei Dimensionen bekannt, dass die gewöhnliche dreifache Blase am Günstigsten ist (mit geringstem Flächeninhalt). Schon dieser Beweis war so kompliziert, dass er für eine Doktorarbeit ausreichte, die ich 2002 betreute.

Hier wollen wir versuchen, eine Tatsache zu verstehen, die für alle Blasencluster bekannt ist – auch für Schäume mit Tausenden von Blasen, wie man sie beim Spülen im Abwaschbecken findet (Abb. 1.4, links), bzw. für unendliche mathematische Schäume, die den Raum füllen (Abb. 1.4, rechts). Diese Tatsache wurde schon

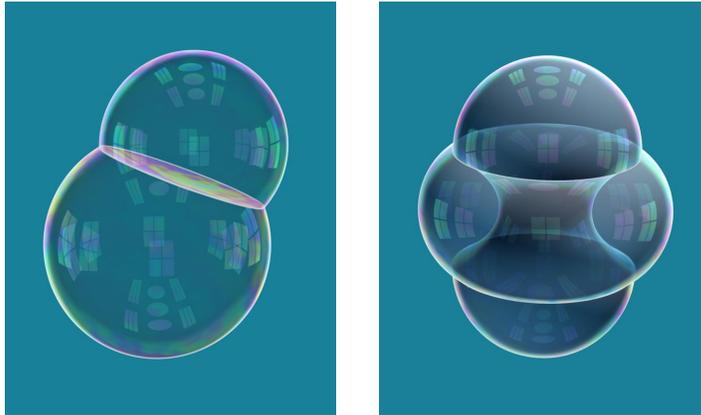


Abbildung 1.3. Doppelblasen (links) sind aus drei sphärischen Flächen gebaut, die sich in einem Kreis treffen. Mathematisch kann man auch andere Formen bauen, die alle geometrischen Regeln erfüllen. Obwohl diese Form (rechts, mit einer Blase als Gürtel um die andere) in Gleichgewicht ist, ist sie instabil und wird physikalisch nie gesehen.

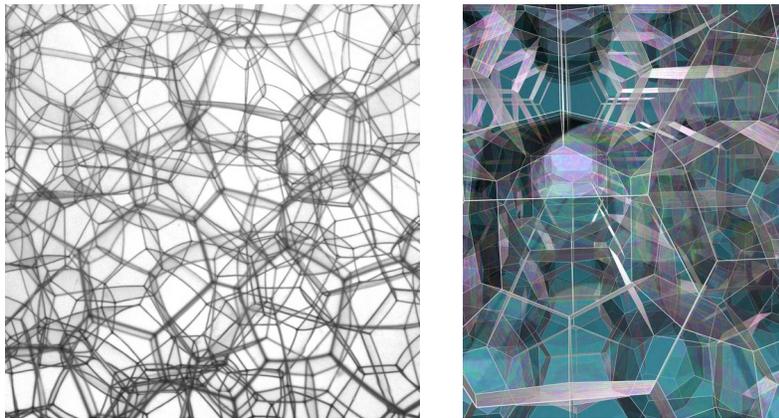


Abbildung 1.4. Ein echter Schaum aus Seifenwasser (links) hat Tausende von Blasen. Von mathematischem Interesse sind auch periodische Schäume, die den ganzen Raum füllen. Der Weaire-Phelan-Schaum (rechts) ist vermutlich die optimale Zerlegung des Raumes in Blasen gleicher Volumina.

1873 vom belgischen Physiker J. A. F. Plateau beobachtet, erst aber 1976 von der amerikanischen Mathematikerin J. E. Taylor streng bewiesen. Sie betrifft die Geometrie der Knotenpunkte – der sogenannten Singularitäten – wo sich verschiedene Blasen treffen.

Als Anlauf werden wir zunächst Blasencluster im 2-dimensionalen Raum untersuchen. Das wunderbare kleine Buch „Flächenland“ beschreibt eine 2-dimensionale Welt, in der 2D-Menschen ohne Kenntnis von der dritten Dimension wohnen. Dann

aber kommt eine Kugel zu Besuch. Genau wie die Flächenländer versuchen mussten, die dritte Dimension zu verstehen, sollten wir durch Lesen des Buches lernen können, höhere Dimensionen zu verstehen.

Eine einzige Seifenblase im Flächenland ist natürlich ein Kreis. Ein Blasencluster schließt verschiedene Gebiete ein und trennt sie von einander durch Kreisbögen. Aber wie treffen sich diese Bögen? Was sind die erlaubten Singularitäten?

Fangen wir an mit einem scheinbar unabhängigen Problem. Stellen wir uns vor, die Bundesregierung möchte ein neues Autobahnnetz bauen, das die vier größten Städte Deutschlands verbindet. Um ein einfaches Beispiel zu haben, nehmen wir an, dass Berlin, München, Frankfurt und Hamburg ein perfektes Quadrat von Seitenlänge s – etwa 400 Kilometer – formen, auch wenn dadurch die Geographie ein bisschen verzerrt wird.

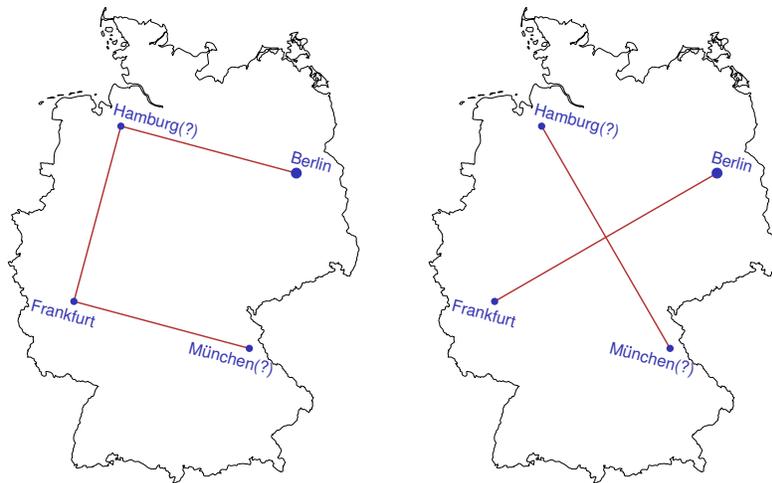


Abbildung 1.5. Die vier größten Städte Deutschlands liegen fast in den Ecken eines Quadrates. (Während Berlin auf dieser Karte richtig liegt – und Frankfurt nicht so weit daneben – liegen die anderen Knoten tatsächlich eher bei Bremen bzw. Regensburg.) Ein mögliches Autobahnnetz, das alle vier verbindet, besteht aus drei Seiten des Quadrats (links). Eine kürzere besteht aus den beiden Diagonalen (rechts).

Um Kosten zu sparen, sollten die neuen Straßen so kurz wie möglich sein. Eine Lösung wäre, alle vier Seiten des Quadrats (mit Gesamtlänge $4s$) als Autobahnen zu bauen. Wenn wir aber eine Seite weglassen, sinkt die Gesamtlänge auf $3s$, während alle Städte immer noch miteinander verbunden sind (Abb. 1.5, links). Noch besser wäre es, alle Seiten wegzulassen und nur die beiden Diagonalen zu bauen (Abb. 1.5, rechts). Alle müssen jetzt über die große Kreuzung (etwa bei Erfurt) fahren, die Gesamtlänge ist aber nur noch $2\sqrt{2}s \approx 2.828s$.

Man könnte leicht glauben, dieses Netz sei die optimale Lösung, aber das stimmt nicht. Wenn man die Details ausrechnet, erkennt man, dass es besser ist, zwei Kreuz-

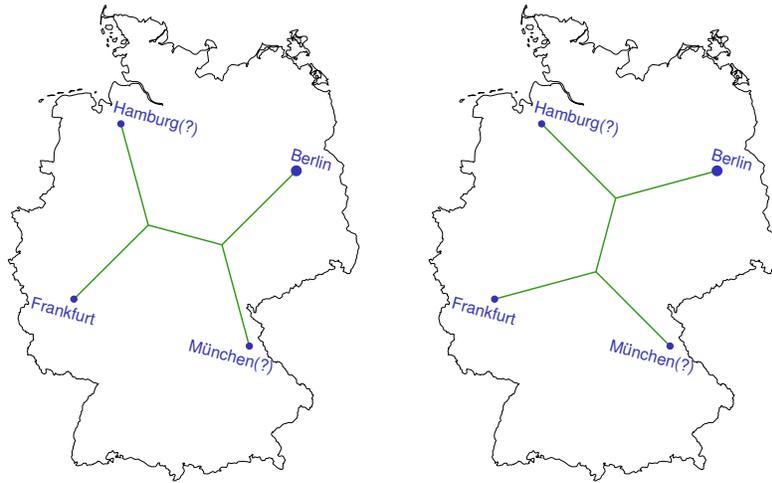


Abbildung 1.6. Das kürzeste Netz hat zwei **Y**-Kreuzungen anstelle der einen **X**-Kreuzung. Weil die 4-fache Symmetrie des Quadrats „gebrochen“ wird, gibt es zwei unterschiedliche Lösungen mit gleicher Länge.

zungen mit je drei Straßen zu bauen, die sich in gleichen 120° -Winkeln begegnen (Abb. 1.6). Hier ist die Gesamtlänge nur noch $(1 + \sqrt{3})s \approx 2.732s$. Eine vierfache **X**-förmige Kreuzung muss durch zwei dreifache **Y**-förmige Kreuzungen ersetzt werden.

Dieses Prinzip betrifft alle Netze: wenn man die Länge minimiert, wird man nie eine vier- oder mehrfache Kreuzung haben. Wenn man beliebig viele Städte (Punkte in der Ebene) mit einem minimalen Netz verbindet, dann besteht dieses Netz – der sogenannte Steiner-Baum – aus geraden Strecken, die sich zu dritt in gleichen 120° -Winkeln treffen.

Jetzt betrachten wir weiter die Blasencluster im Flächenland. Die Druckdifferenzen zwischen den Blasen ergeben die Krümmung der Kanten – jede Kante zwischen zwei Blasen ist ein Kreisbogen. Aber andererseits besagt das Prinzip der Längenminimierung, dass Blasencluster in der Ebene genau dieselben Regeln erfüllen wie unsere Straßennetze. Insbesondere ist jede Singularität eine dreifache Kreuzung mit gleichen 120° -Winkeln. Unter der Lupe merken wir die Krümmungen der Bögen nicht mehr, und die Singularität sieht genau so aus wie in den Straßennetzen. Der Grund dafür ist, dass im kleinen Umfang die Volumenkräfte unbedeutend klein sind im Vergleich zu den Oberflächenkräften. (Aus demselben Grund können manche kleine Insekten übers Wasser gehen: in ihrem kleinen Umfang ist die Erdanziehungskraft unbedeutend klein im Vergleich zur Oberflächenspannung des Wassers.)

Nun sind wir bereit, in die dritte Dimension zurückzukommen, um die Singularitäten von 3D Blasenclustern zu betrachten. Die erste Plateau'sche Regel besagt: Blasen treffen sich in dreifachen Kanten, wobei die drei Seifenhäute gleiche Raumwinkel von 120° bilden. Das kann man jetzt leicht verstehen: hätten wir eine vier-

fache Kante, wäre es in jedem Querschnitt (wie ein **X**) leistungsschwach und würde in zwei dreifache **Y**-förmige Kanten auseinanderbrechen – genau wie bei unserem Autobahnnetz.

Wie können diese Kanten – die sogenannten Plateau-Grenzen – in Punktsingularitäten zusammentreffen? Unter der Lupe können wir die Druckdifferenzen (und die entstehenden Krümmungen) wieder ignorieren. Wir sehen flache Seifenhäute, die sich in einem zentralen Punkt treffen. Mathematisch gesehen haben wir den sogenannten *Kegel* über einem Netz in der Sphäre. Dieses Netz ist (ähnlich wie die zuvor beschriebenen) aus „geraden“ Großkreisbögen zusammengesetzt, die sich zu dritt in gleichen Winkeln treffen.

Was bedeutet das? Die Sphäre ist die Oberfläche einer Kugel. Für jedes Netz in der Sphäre ist der *Kegel* über diesem Netz die Vereinigung aller geraden Strecken vom Mittelpunkt der Kugel zu den verschiedenen Punkten im Netz. Zum Beispiel, der Kegel über dem Äquator ist eine flache Kreisscheibe, während der Kegel über einem anderen Breitenkreis ein ganz normaler, runder Kegel ist – deshalb der Name.

Aus einem Polyeder entsteht ein interessantes Netz auf der Sphäre. Fangen wir z.B. mit einem Würfel an. Wenn wir eine Taschenlampe auf den Würfel setzen – auf eine von den sechs Seiten – leuchtet die Lampe in eine von sechs ausgezeichneten Richtungen. Wenn wir die Lampe um eine Kante kippen – von einer Seite zur nächsten – beschreibt der Lichtstrahl einen Großkreisbogen auf der Himmelskugel. Insgesamt bekommen wir ein Netz, das aus drei senkrechten Großkreisen besteht (Abb. 1.7).

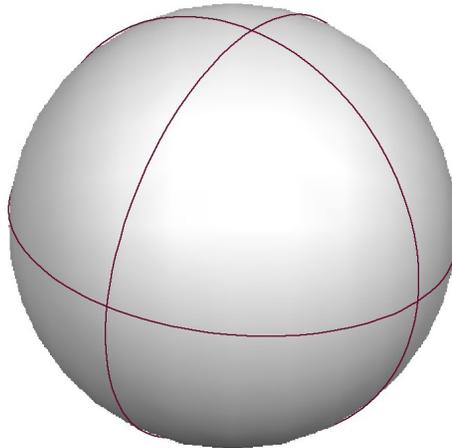


Abbildung 1.7. Dual zum Würfel ist ein sphärisches Oktaeder, bestehend aus den drei Großkreisen in den Koordinatenebenen. Die sechs Kreuzungen sind die Richtungen senkrecht zu den Seiten des Würfels.

Dieses Netz ist eine Art Oktaeder auf der Sphäre. Es ist dual zum Würfel in dem Sinne, dass die sechs Ecken, zwölf Kanten und acht Gebiete den sechs Seiten,

zwölf Kanten bzw. acht Ecken des Würfels entsprechen. In jeder Ecke sehen wir eine vierfache Kreuzung, weil der Würfel quadratische Seiten hat: es gibt jeweils vier Möglichkeiten, die Taschenlampe weg von einer Seite zu kippen.

Für unsere Seifenhautsingularitäten wollen wir stattdessen sphärische Netze mit dreifachen Kreuzungen. Auch diese entstehen als Duale zu Polyedern, die Polyeder müssen aber dreieckige Seiten haben. Insbesondere muss jede Seite ein gleichseitiges Dreieck sein, weil wir gleiche 120° -Winkel wollen. Betrachten wir zum Beispiel das Oktaeder. Es gibt acht Stellen, wo man die Taschenlampe auf eine Seite setzen kann; diese acht Richtungen sind die Ecken eines sphärischen Würfels, der als duales Netz zum Oktaeder entsteht (Abb. 1.8).

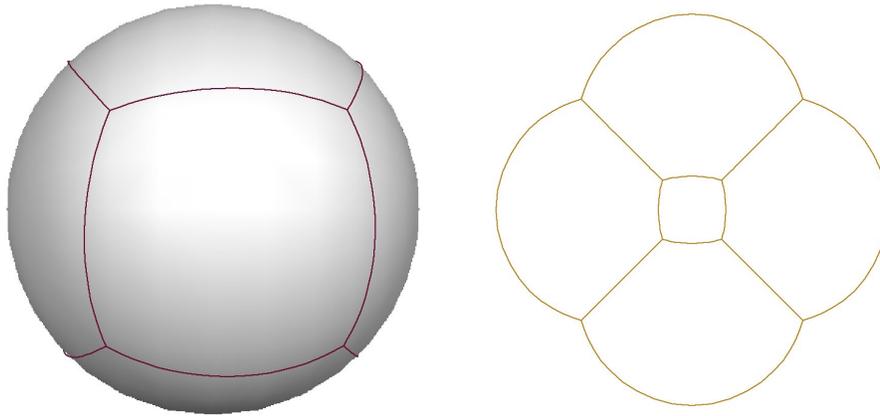


Abbildung 1.8. Dual zum Oktaeder ist ein sphärischer Würfel (links). Weil die Seiten des Oktaeders gleichseitige Dreiecke sind, treffen sich hier die Großkreisbögen zu dritt in gleichen 120° -Winkeln. Das Netz kann man als Blasencluster in der sphärischen Oberfläche betrachten. Weil Kreise und Winkel unter stereographischer Projektion erhalten bleiben, ist die Projektion unseres Netzes (rechts) ein Blasencluster im Flächennetz.

Unsere Aufgabe heißt nun, konvexe Polyeder zu finden, wo jede Seite ein gleichseitiges Dreieck ist. Einige davon sind gut bekannt: unter den regulären Polyedern (den Platonischen Körpern) gibt es drei mit dreieckigen Seiten. Das sind das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder. Weil unsere Polyeder nicht regulär sein müssen, gibt es aber weitere Möglichkeiten.

Wenn man zwei Tetraeder zusammenklebt oder zwei Hauben von einem Ikosaeder, ergibt sich eine dreieckige bzw. fünfeckige Bipyramide. (Die viereckige Bipyramide ist nichts anderes als das Oktaeder.) Zwei weitere Möglichkeiten erhält man aus Polyedern mit quadratischen als auch dreieckigen Seiten: das (dreieckige) Prisma hat drei Quadrate und das (quadratische) Antiprisma hat zwei Quadrate. Klebt man eine Pyramide auf jedes Quadrat, erhält man ein Polyeder mit nur noch (14 bzw. 16) dreieckigen Seiten. (Das Antiprisma mit zwei Pyramiden kann man auch als vier Fünftel eines Ikosaeder verstehen.) Wir haben nun sieben Polyeder

auf unserer Liste; ein weiteres Beispiel – mit 12 Seiten – widersteht jeder einfachen Beschreibung.

Es ist nicht schwierig kombinatorisch zu beweisen, dass diese acht Polyeder (Abb. 1.9) die einzigen konvexen sind, deren Seiten gleichseitige Dreiecke sind. Sie

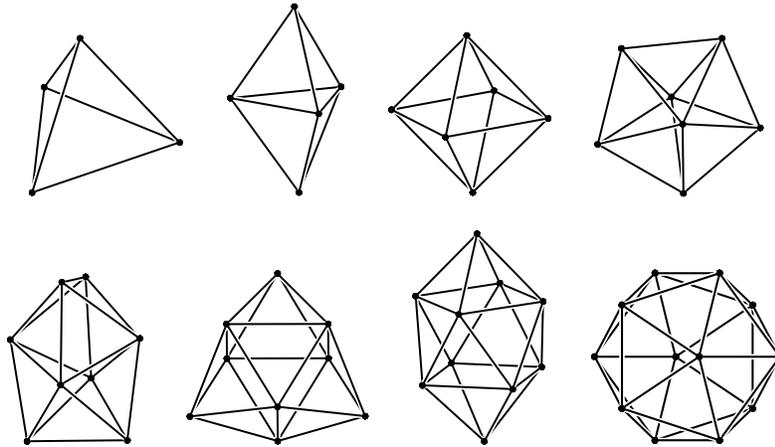


Abbildung 1.9. Es gibt acht Deltaeder: in der ersten Reihe das Tetraeder und die drei Bipyramide (u.a. das Oktaeder); am Ende der zweiten Reihe das Ikosaeder.

heißen *Deltaeder*, weil ihre Seiten dem griechischen Buchstaben Δ (Delta) ähneln. Durch den Trick mit der Taschenlampe ergibt jedes Deltaeder ein duales Netz in der Sphäre, und der Kegel über diesem Netz ist ein Kandidat für eine Singularität in Seifenhaut.

Wir können jedes dieser Netze aus Draht bauen und ins Seifenwasser eintauchen. Das duale Netz eines Tetraeders ist wieder ein Tetraeder. In diesem Falle ist die resultierende Seifenhaut tatsächlich ein Kegel: sechs flache Seifenhautstücke kommen im Mittelpunkt der Sphäre zusammen (Abb. 1.10).

Als nächstes nehmen wir das Oktaeder, dessen duales Netz ein Würfel ist. Mit Computergrafik können wir ein Bild vom Kegel erstellen: zwölf flache Stücke treffen sich im Mittelpunkt (Abb. 1.11, links). Die erste Plateau'sche Regel ist erfüllt: die Raumwinkel entlang den Plateau-Grenzen sind jeweils 120° . Aber dieser Kegel ist instabil: die einzelne komplizierte Singularität zerbricht in vier tetraederartige Singularitäten (Abb. 1.11, rechts). Das ist genau analog zur vierfachen Straßenkreuzung, die in zwei dreifache Kreuzungen zerbrach. Wir haben auch hier den Symmetriebruch: das kleine quadratische Seifenhautstück in der Mitte kann in jeder der drei Koordinatenrichtungen entstehen (Abb. 1.12).

Wir können die anderen Netze – dual zu den anderen Deltaedern – nacheinander probieren. Jedes Mal minimiert die Seifenhaut ihren Flächeninhalt nicht mit einem

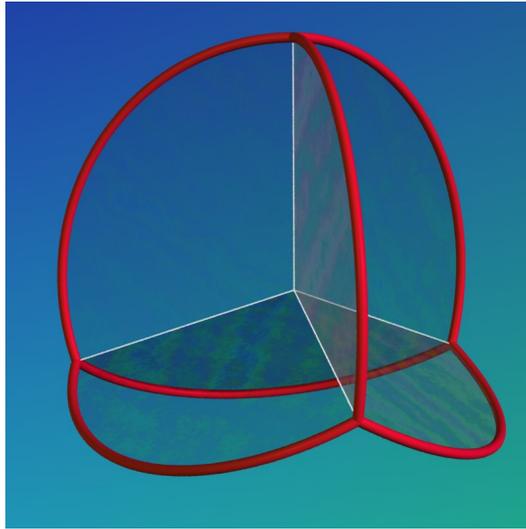


Abbildung 1.10. Das duale Netz zum Tetraeder ist ein sphärisches Tetraeder, hier aus rotem Draht gebaut. Taucht man es ins Seifenwasser, bekommt man als Seifenhaut einen Kegel.

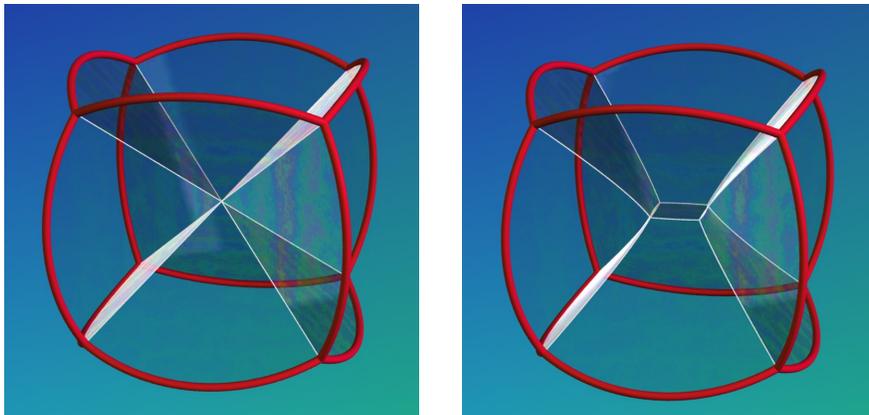


Abbildung 1.11. Dual zum Oktaeder ist ein sphärischer Würfel; taucht man dieses Netz ins Seifenwasser, bekommt man nicht den Kegel (links). Eine Seifenhaut mit vier tetraedrischen Singularitäten (rechts) hat weniger Flächeninhalt.

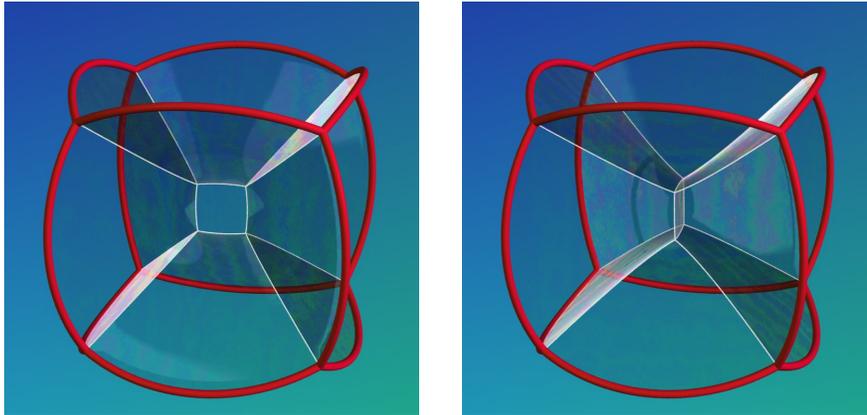


Abbildung 1.12. Die Seifenhaut kann man auch drehen in zwei weitere Richtungen – immer mit gleichem Flächeninhalt.

einzelnen Kegel – einer neuen Art Singularität – sondern mit mehreren tetraederartigen Singularitäten (Abb. 1.13).

So haben wir die zweite Plateau'sche Regel grob bewiesen: die einzige Singularität, die man bei Seifenhäuten, Blasenclustern und Schäumen sieht, ist der tetraederartige Kegel.

Die Plateau'schen Regeln sind die Basis, auf der man die geometrische Struktur von Blasenclustern und Schäumen verstehen kann. Schäume sind wichtige Materialien in der Industrie, und Kenntnisse ihrer geometrische Struktur helfen dabei, ihre strukturellen und chemischen Eigenschaften zu verstehen.

Andererseits entsteht ein interessantes, aktuelles Forschungsgebiet in der Mathematik daraus, unsere Ergebnisse in höhere Dimensionen zu erweitern. In Dimension 4 finden wir nur fünf Deltaeder; die Dualen dazu sind sphärische Polyeder, die als Kegelkandidaten dienen. (Unter denen sind der Hyperwürfel und das Hyperdodekaeder, Abb. 1.14.)

Diesmal sind aber zwei der fünf Kegel stabil und tauchen deswegen als mögliche Singularitäten in Seifenhaut auf. Darüber hinaus gibt es weitere Kegelkandidaten, die nicht aus Deltaedern gebaut werden. Weil es in 4D mindestens zwei Arten von Seifenhautsingularitäten gibt, ist die Klassifikation in 5D noch schwieriger.

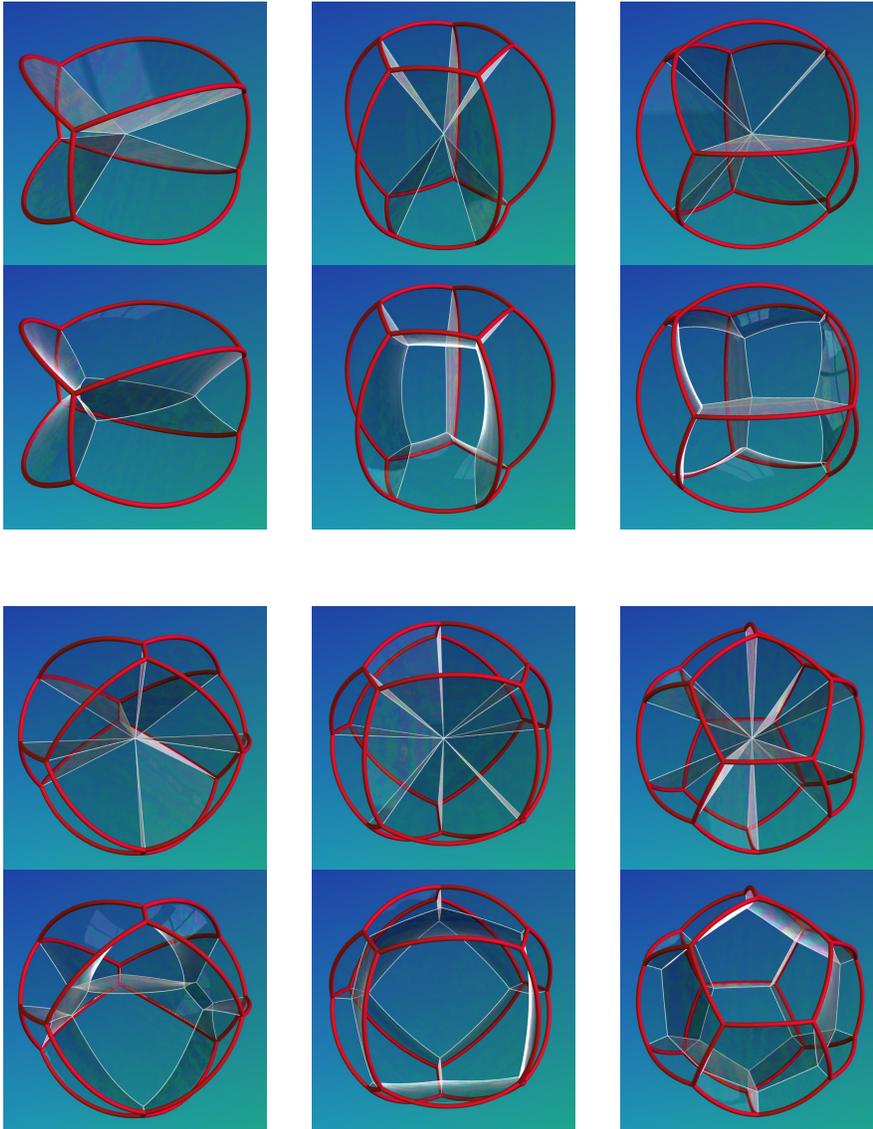


Abbildung 1.13. Die weiteren sechs dualen Netze können wir auch virtuell aus rotem Draht bauen. Sie ergeben jedoch keine neuen Singularitäten: die Seifenhaut bleibt nicht beim Kegel (in der oberen Bildhälfte), sondern findet jeweils eine Lösung (in der unteren Bildhälfte) mit mehreren tetraedrischen Singularitäten und weniger Flächeninhalt.

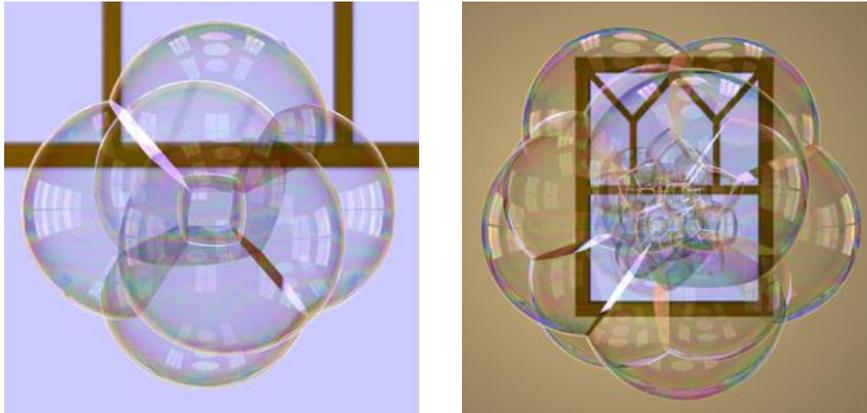


Abbildung 1.14. Analog zum Würfel und Dodekaeder gibt es in 4D den Hyperwürfel (mit 8 Zellen) und das Hyperdodekaeder (mit 120 Zellen). Sphärische Versionen davon sind Netze, die wir als Kegelskandidaten testen sollten. Um diese zu sehen, benutzen wir eine stereographische Projektion in den 3D-Raum; genau wie in Abb. 1.8 entsteht dabei ein Blasencluster, der alle Plateau'schen Regeln erfüllt. Jeweils eine Zelle wird auf das unendliche Gebiet ausserhalb des Clusters abgebildet; wir sehen diese beiden Cluster mit 7 bzw. 119 Blasen.