Abschlussklausur – Lösungen

1 a) $$F(u,u') = (1+u'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$F_z = 2u' \, \frac{1}{2} \, (1+u'^2)^{-\frac{1}{2}} = u' \, (1+u'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F_{zz} = (1+u'^2)^{-\frac{1}{2}} + 2u'^2 \left(-\frac{1}{2}\right) (1+u'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1+u'^2 - u'^2}{(1+u'^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+u'^2)^{3/2}} \qquad (*)$$

Die Eulergleichungen haben ein 1. Integral

$$F_z(u,u') = \text{const},$$

also

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = c$$

$$\Rightarrow \quad u'^2 = c^2 (1+u'^2)$$

Damit ist u' notwendig konstant, und die gegebenen Randbedingungen implizieren sofort

$$u(x) = x$$

b) • F ist streng elliptisch wegen (*)

• Eine Schar von Lösungen der Eulergleichungen ist gegeben durch

$$U_S(x) = SU$$

$\Rightarrow \varphi(x) = \left.\frac{dU_S}{dS}\right|_{S=0}$ ist ein Jacobifeld, das am linken Rand verschwindet, ist linear (d.h. es gibt keinen konjugierten Punkt) und ist für eine skalare Gleichung 2. Ordnung schon eine vollständige Basis aller solcher Jacobifelder. $\square$

2. a) $\mathcal{W}_S(Q) = \int_{T_1}^{T_2} T \left(\frac{dQ}{dT}\right)^2 dT$

mit $T = t + S \Rightarrow dT = dt$

$Q = q$

$$\Rightarrow \mathcal{W}_S = \int_{t_1}^{t_2} (t+S) \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 dt$$

$$= \mathcal{W}_{S=0} + S \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 dt$$

Da der 2. Term i.A. nicht verschwindet, ist $\mathcal{W}_S$ nicht invariant.

b) mit $T = t$, $Q = q + s$ ist $\frac{dQ}{dT} = \frac{dq}{dt}$

$$\Rightarrow \mathcal{W}_S = \int_{T_1}^{T_2} T \left(\frac{dQ}{dT}\right)^2 dT = \int_{t_1}^{t_2} t \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 dt .$$

Der Infinitesimale Generator ist

$$\eta = \left.\frac{dQ}{ds}\right|_{s=0} = 1 ,$$

also ist das 1. Integral

$$L_v \eta = \text{const} = 2t\dot{q} .$$

3 a) $$0 = \frac{d\mathcal{W}_S}{ds} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s}\left[L\left(t, Q, \frac{dQ}{dt}\right)\right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[L_q \frac{\partial Q}{\partial s} + L_v \frac{\partial^2 Q}{\partial s \partial t}\right] dt \qquad (*)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial Q}{\partial s} \underbrace{\left[L_q - \frac{d}{dt} L_v\right]}_{\substack{=0 \text{ falls Euler-Lagrange} \\ \text{Gleichung erfüllt.}}} dt + L_v \frac{\partial Q}{\partial s}\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

Setze also $s=0$, dann gilt

$$L_v\, \eta(q)\Big|_{t=t_1} = L_v\, \eta(q)\Big|_{t=t_2},$$

d.h. $L_v \eta$ ist ein erstes Integral.

b) Da in (*) t_1 und t_2 beliebig sind, muss schon gelten, dass

$$L_q \frac{\partial Q}{\partial s} + L_v \frac{\partial^2 Q}{\partial s \partial t}\Big|_{s=0} = 0 .$$

Da $\frac{\partial^2 Q}{\partial s \partial t}\Big|_{s=0} = \frac{d}{dt}\big(\eta(q)\big) = \eta'(q)\,\dot q$,

folgt sofort

$$L_q(t,q,\dot q)\; \eta(q) + L_v(t,q,\dot q)\; \eta'(q)\; \dot q = 0 .$$

c) $L = t\, e^q\, \dot q^2$

$\Rightarrow L_q = t\, e^q\, \dot q^2$ und $L_v = 2t\, e^q\, \dot q$

$\Rightarrow L_q \eta + L_v \eta' \dot q = t e^q \dot q^2 \eta + 2t e^q \dot q\, \eta' \dot q \equiv 0$

$\Rightarrow \eta = -2\eta'$ (falls $t \neq 0$, $\dot q \neq 0$)

oder $\eta'(q) = -\frac{1}{2}\eta(q)$.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist offensichtlich

$$\eta(q) = e^{-\frac{1}{2}q}$$

(Bei infinitesimalen Generatoren kommt es auf skalare Vielfache nicht an.)

d) Ein erstes Integral ist

$$L_v \eta = \text{const}$$

$$\Rightarrow 2t\, e^{q}\, \dot{q}\, e^{-\frac{1}{2}q} = \text{const}$$

oder $t\, e^{\frac{1}{2}q}\, \dot{q} = c$.

e) $$t\, e^{\frac{q}{2}} \frac{dq}{dt} = c$$

$$\Rightarrow e^{\frac{q}{2}}\, dq = \frac{c}{t}\, dt$$

$$\Rightarrow 2e^{\frac{q}{2}} + b = c \ln t$$

$$\Rightarrow e^{\frac{q}{2}} = \frac{c \ln t - b}{2}$$

$$\Rightarrow q(t) = 2 \ln\left(\frac{c \ln t - b}{2}\right)$$

4 a) Nehme die Variationsableitung der ersten, und die Zeitableitung der zweiten Gleichung:

$$\delta \dot{q} = \delta\big(u(q,t)\big) = (\delta u)(q,t) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(q,t)\, \underbrace{\delta q}_{\equiv w(q,t)}$$

$$\frac{d}{dt}\delta q = \frac{d}{dt}\big(w(q,t)\big) = \dot{w}(q,t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(q,t)\, \underbrace{\dot{q}}_{\equiv u(q,t)}$$

Damit kann man die rechten Seiten gleichsetzen und, da q invertierbar ist, die Argumente weglassen:

$$\delta u + \frac{\partial u}{\partial x} w = \dot{w} + \frac{\partial w}{\partial x} u$$

□

b) $$\delta W = \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} u\, \delta u \, dx\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} u \left[\dot{w} + u\frac{\partial w}{\partial x} - w\frac{\partial u}{\partial x}\right] dx\, dt$$

Randterme verschwinden nach Voraussetzung

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} \left[-\dot{u} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}u^2}_{=2u\frac{\partial u}{\partial x}} - u\frac{\partial u}{\partial x}\right] w \, dx\, dt$$

Da w als Variation beliebig, folgt mit dem L.d.V.: $\dot{u} + 3u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.