Lösungen zur Probeklausur

1. a) Euler-Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(2u' + 3u'^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u'(2+3u') = c$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für u', d.h. u' kann maximal 2 Werte annehmen.
Da u' außerdem stetig ist, folgt $u' = \tilde{c}$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \tilde{c}x + b$$

und mit den gegebenen Randwerten offensichtlich

$$u(x) = x$$

b) mit $F(x,y,z) = z^2 + z^3$ folgt

$$F_{zz} = 2 + 6z$$

und $F_{zz}(x, u, u') = 2 + 6 \cdot 1 = 8 > 0$

Eine Schar von Lösungen der Eulergleichung, die nur die linke RB erfüllen ist

$$u_s(x) = sx$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=1} = x \quad \text{ist ein Jacobifeld,}$$

und alle Jacobifelder mit 0 als linker RB sind Vielfache von φ.

$\Rightarrow \nexists$ konjugierte Punkte zu $x=0$

$\Rightarrow$ hinreichende Bedingung erfüllt.

2. a) $F(x,z) = z(1+x^2 z)$ hängt nicht von y ab, also ist ein 1. Integral

$$1 + x^2 u' + u' x^2 = c$$

$$\Rightarrow \quad x^2 u' = \tilde{c} \quad \text{mit} \quad \tilde{c} = \frac{c-1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad du = \frac{\tilde{c}}{x^2}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad u = -\frac{\tilde{c}}{x} + \gamma$$

Damit ist u nur C^2, wenn $\tilde{c} = 0$, mit RB folgt $u = 1$.

b) $F_{zz} = 2x^2 \geq 0$,

aber $F_{zz} = 0$ für $x = 0$

$\Rightarrow$ strikte Legendre-Bedingung ist nicht erfüllt.

c) $$\mathcal{F}(\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{u} + \varepsilon\varphi) - \mathcal{F}(\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{u}) = \int_{-1}^{2} \varepsilon\varphi'(1 + x^2\varepsilon\varphi')\,dx - 0$$

$$= \varepsilon \int_{-1}^{2} \varphi'\,dx + \varepsilon^2 \int_{-1}^{2} x^2\varphi'^2\,dx = \varepsilon\big(\underbrace{\varphi(2)}_{=0} - \underbrace{\varphi(-1)}_{=0}\big) + \underbrace{\varepsilon^2 \int_{-1}^{2} x^2 \varphi'^2\,dx}_{>0 \text{ für } \varphi\neq 0} \quad \square$$

da $\varphi \in \delta\mathcal{U}$

3. $$0 = \delta \mathcal{F}(u) = \int_\alpha^\beta \delta\left(\frac{1}{2} u''^2 + \frac{1}{2} u^2 + f u\right) dx$$

$$= \underbrace{\int_\alpha^\beta u'' \, \delta u'' \, dx}_{} + \int_\alpha^\beta (u \delta u + f \delta u) \, dx$$

$$= u'' \, \delta u' \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u''' \, \delta u' \, dx$$

$$= u''(\beta) \, \delta u'(\beta) - u''(\alpha) \, \delta u'(\alpha) - u''' \, \delta u \Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta u'''' \, \delta u \, dx$$

$$= u''(\beta) \, \delta u'(\beta) - u''(\alpha) \, \delta u'(\alpha) + \int_\alpha^\beta \delta u \, (u'''' + u + f) \, dx$$

Lemma der Variationsrechnung: (OBdA $\delta u'(\alpha) = \delta u'(\beta) = 0$)

$$u'''' + u + f = 0$$

Nehme jetzt Variationen mit entweder $\delta u'(\alpha) \neq 0$ oder $\delta u'(\beta) \neq 0$: gibt RB

$$u''(\alpha) = u''(\beta) = 0$$

außerdem noch zwei RB durch die Variationsklasse:

$$u(\alpha) = a, \quad u(\beta) = b$$

also insgesamt 4 RB entsprechend einer DGL 4. Ordnung.

4 a) Suche $\mathcal{F}$, so dass

$$\delta \mathcal{F}(u) = \int_\Omega (-\Delta u + f)\, \delta u \, dx$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla u \underbrace{\delta u}_{=0 \text{ auf } \partial\Omega} do + \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \delta u + f \delta u)\, dx$$

$$= \delta \underbrace{\int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right) dx}_{=: \mathcal{F}(u)}$$

b) • Zur Poissongleichung gehört das Variationsproblem aus Teil (a).

• Das Problem ist elliptisch, d.h.

$$F(x, u, \nabla u) = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u$$

also $\quad F(x, y, z) = \frac{1}{2} |z|^2 + f y$

$$F_{zz} = I,$$

die Einheitsmatrix ist klar positiv definit.

• Wende Regularitätssatz an (dieser gilt auch für $n > 1$, siehe Fischer/Kaul)