evr - übungen

(1) a) es ist das erste Integral von $\mathcal{F}(u)$

$$V(y,z) = F_z(y,z) \cdot z - F(y,z)$$
$$= \frac{yz^2}{\sqrt{1+z^2}} - y \cdot \sqrt{1+z^2}$$
$$= -\frac{y}{\sqrt{1+z^2}}$$
$$= \text{konst}$$
$$= c,$$

d.h. es existiert eine solche Konstante c;

weiter ist

$$c = \frac{u(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}$$
$$= \frac{\lambda \cdot \frac{\cosh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{c^2}\frac{\sinh^2(\frac{x}{c})}{\cosh^2(\frac{\beta}{c})}}}$$

da aber $\lambda \cdot \frac{\cosh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})} \neq 0$ (denn $\lambda \neq 0$) und $\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{c^2}\cdot\frac{\sinh^2(\frac{x}{c})}{\cosh^2(\frac{\beta}{c})}} > 0$ ist,

gilt weiter

$$c \neq 0$$ ✓ 2

b) es ist $w(x) = u(x) + \lambda$

$$= \lambda\left(1 + \frac{\cosh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})}\right)$$

weiter ist $\cosh(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, d.h.

$$1 + \frac{\cosh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})} > 0$$

aus $w(x) > 0$ für $|x| < \beta$ folgt damit

$$\lambda = \frac{w(x)}{1+\frac{\cosh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})}} > 0 \quad \text{für } |x| < \beta$$ ✓ 2

c) $u(x)$ erfüllt die EG für $\mathcal{F}(u)$:

$$u'' \cdot u - (u')^2 - 1 = 0;$$

mit
$$u(x) = \lambda \cdot \frac{\cosh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})}$$
$$u'(x) = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\sinh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})}$$
$$u''(x) = \frac{\lambda}{c^2} \cdot \frac{\cosh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})}$$ ✓

folgt damit

$$u'' \cdot u - (u')^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda}{c^2} \cdot \frac{\cosh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})} \cdot \lambda \cdot \frac{\cosh(\frac{x}{c})}{\cosh(\frac{\beta}{c})} - \frac{\lambda^2}{c^2} \cdot \frac{\sinh^2(\frac{x}{c})}{\cosh^2(\frac{\beta}{c})} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta}{c})} \cdot \left(\cosh^2(\tfrac{x}{c}) - \sinh^2(\tfrac{x}{c})\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta}{c})} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \pm c \cdot \cosh(\tfrac{\beta}{c})$$

$$\overset{b)}{\Rightarrow} \quad \lambda = c \cdot \cosh(\tfrac{\beta}{c})$$ 2

d) $$\mathcal{G}(u) = \int_{-\beta}^{\beta} (1 + (u')^2)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$\mathcal{G}(u+\lambda) = \int_{-\beta}^{\beta} \left(1 + \left[\tfrac{d}{dx}(u+\lambda)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-\beta}^{\beta} (1 + (u')^2)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}(u+\lambda) = \mathcal{G}(u) = \int_{-\beta}^{\beta} (1 + (u')^2)^{\frac{1}{2}} \, dx$$
$$= \int_{-\beta}^{\beta} \left(1 + \frac{\lambda^2}{c^2} \cdot \frac{\sinh^2(\frac{x}{c})}{\cosh^2(\frac{\beta}{c})}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$\overset{c)}{=} \int_{-\beta}^{\beta} (1 + \sinh^2(\tfrac{x}{c}))^{\frac{1}{2}} \, dx$$
$$= \int_{-\beta}^{\beta} \cosh(\tfrac{x}{c}) \, dx$$
$$= c \cdot (\sinh(\tfrac{\beta}{c}) - \sinh(-\tfrac{\beta}{c}))$$
$$= 2c \cdot \sinh(\tfrac{\beta}{c}) =: f(c)$$ 2

e) es ist $$\lim_{c \to \infty} (f(c)) = \lim_{c \to \infty} (2c \cdot \sinh(\tfrac{\beta}{c}))$$
$$= \lim_{c \to \infty} \left(\frac{\sinh(\frac{\beta}{c})}{\frac{1}{2c}} \right)$$
$$= \lim_{c \to \infty} \left(\frac{-\frac{\beta}{c^2} \cdot \cosh(\frac{\beta}{c})}{-\frac{1}{2c^2}} \right)$$
$$= \lim_{c \to \infty} (2\beta \cdot \cosh(\tfrac{\beta}{c}))$$
$$= 2\beta$$

und für $c \to 0+$ geht $f(c) \to \infty$;

außerdem ist $f'(c) = 2\sinh(\frac{\beta}{c}) - \frac{2\beta}{c} \cdot \cosh(\frac{\beta}{c})$

$= 2\left(\sinh(\frac{\beta}{c}) - \frac{\beta}{c} \cdot \cosh(\frac{\beta}{c})\right)$;

da $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} < x$ für $x > 0$, folgt gut!

$f'(c) < 0$ für $c > 0$

$\Rightarrow$ $f(c)$ ist streng monoton fallend für $c > 0$ und aufgrund $\lim_{c\to\infty}(f(c)) = 2\beta$

ist $f(c) > 2\beta$

$\Rightarrow$ zu jedem $L > 2\beta$ gibt es genau ein $c > 0$ mit $L = f(c)$ 2

$\Rightarrow$ c ist bei gegebener Länge L eindeutig bestimmt