Lösungen zu Übung 8

1. $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$

Separationsansatz für S:

$$S = -Et + W(q)$$

$\Rightarrow \quad \partial_t S + H(q, S'(q)) = 0$ ergibt

$$E = \frac{1}{2}\left(W'^2 + \omega^2 q^2\right).$$

Auflösen nach S' und Integration ergibt

$$W(q,E) = \int_0^q \sqrt{2E - \omega^2 s^2}\, ds \, .$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \int_0^q \left(2E - \omega^2 s^2\right)^{-\frac{1}{2}} ds - t$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial E \partial q} = \left(2E - \omega^2 q^2\right)^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$

Die Transformation Ψ im Satz von Hamilton-Jacobi ist also nichtsingulär.

Mit $\bar{q} = E$, berechne

$$\bar{p} = -\frac{\partial S}{\partial \bar{q}}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{p} + t = \int_{q_0}^{q} \left(2\bar{q} - \omega^2 s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\bar{q}}} \int_{0}^{q} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{2\bar{q}} s^2}} \, ds \qquad u = \frac{\omega}{\sqrt{2\bar{q}}} s$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_{0}^{\frac{\omega}{\sqrt{2\bar{q}}} q} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$= \frac{1}{\omega} \arcsin u \Big|_{0}^{\frac{\omega}{\sqrt{2\bar{q}}} q}$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{\sqrt{2\bar{q}}}{\omega} \sin\left(\omega(\bar{p} + t)\right)$$

Dies ist die bekannte allgemeine Lösung der Gleichung des Harmonischen Oszillators, wobei $\bar{q}$ und $\bar{p}$ die Rolle der beiden Integrationskonstanten spielen. Man kann jetzt auch p ausrechnen:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2\bar{q} - \omega^2 q^2} = \sqrt{2\bar{q}} \, \cos\left(\omega(\bar{p} + t)\right)$$

(D.h. $p = \dot{q}$, entspricht der 1. Hamiltongleichung.)

2. Gilt

$$\frac{S'(q)^2}{2m} + V(q) = E \quad , \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

so gilt mit $p \equiv S'(q)$

$$H(q,p) = E$$

und $$\frac{p\dot{p}}{m} + V'(q)\underbrace{\dot{q}}_{=\frac{p}{m}} = 0$$

also $$\dot{p} = -V'(q) = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad (\text{falls } p \neq 0)^{*}$$

D.h. beide Hamilton-Gleichungen sind erfüllt.

Umgekehrt ist die Behauptung klar: Es wurde einfach $S'(q)$ für p in die Hamiltonfunktion eingesetzt.

* Ist $p=0$ in isolierten Punkten, so läßt sich der Schluss dennoch durch Stetigkeitsüberlegungen führen.

Ist $p=0$ in einem Intervall, so muss für das zugehörige q gelten, dass $V'(q)=0$, sonst ist die Aussage falsch.