Numerik: Übungsblatt 4

1. (Siehe Programme `gauss.m` und `simple_gauss.m` im Anhang.)
2. (Siehe Programme `gauss.m` und `pivot_gauss.m` im Anhang.)
3. Zum Vergleich von `simple _gauss(A,b)`, `pivot_gauss(A,b)` und dem Octave-Algorithmus bieten sich an

   (a) eine 25×25 Vandermonde-Matrix A und ein Vektor b der Zeilensummen von A. Beim ersten Betrachten der Ergebnisse stellt man in allen drei Fällen fest, daß die numerische Lösung weit von der exakten Lösung entfernt ist. Es ist allerdings der Fall, daß die Werte, die beim Rückwärtseinsetzen als erste berechnet werden, wesentlich näher an der exakten Lösung liegen, als die, die erst am Schluß berechnet werden. Es liegt die Vermutung nahe, daß sich im Verlauf des Rückwärtseinsetzens der Fehler noch verstärkt. Bei den Algorithmen `simple_gauss(A,b)` und `pivot_gauss(A,b)` stellt man zusätzlich noch ein große numerische Instabilität fest, denn die Werte oszillieren stark. Auch der Algorithmus von Octave ist numerisch instabil, jedoch ist diese Instabilität geringer, als die der beiden anderen Algorithmen. Vergleicht man die Residuumsnorm[1] r der drei Algorithmen, so stellt man fest, das $r_{octave} < r_{simple} < r_{pivot}$. Überraschend ist die Tatsache, daß die Residuumsnorm von `simple_gauss(A,b)` kleiner ist, als die von `pivot_gauss(A,b)`. Es liegt demnach ein Fall vor, bei dem die Pivotsuche das Ergebnis verschlechtert, statt es zu verbessern. Außerdem trägt die hohe Konditionszahl der Matrix A (`cond(A) = 3.9910e+34`) zur Verschlechterung der Ergebnisse bei.

   (b) eine 100×100 Matrix B, wobei `B = rand(100)^2` und ein Vektor c mit `c = rand(100,1)`. Berechnet man hier die Residuumsnormen, ergibt sich $r_{octave} = 1.6667e{-}12$, $r_{pivot} = 7.6620e{-}12$ und $r_{simple} = 1.0641e - 11$, so daß gilt $r_{octave} < r_{pivot} < r_{simple}$. Dies ist die zu erwartende Reihenfolge, denn im Allgemeinen verbessert die Pivotsuche das Ergebnis. Im Vergleich zu (a), als mit der Vandermonde-Matrix gerechnet wurde, sind die Residuumsnormen wesentlich besser, daß heißt näher bei 0 (Idealfall). Das liegt auch an der kleineren Konditionszahl von B (`cond(B) = 5.7059e+05`).

[1] Die Residuumsnorm wird berechnet als $r = \|\Delta b\|$, wobei $\Delta b = Ax_{num} - b$ und x_{num} die numerische Lösung für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist.